Universidad Simón Bolívar
CO3121. Probabilidades para Ingenieros. Enero-Marzo 2010
Problemario I

1. Supongamos que $\Omega = A \cup B$ y $P(A \cap B) = 0.2$. Hallar:
   (a) El máximo valor posible para $P(B)$, de tal manera que se cumpla $P(A) \geq P(B)$.
   (b) $P(A^c)$, sabiendo que $P(B) = 0.7$
   (c) $P(A^c \cap B^c)$

2. Dado que: $\Omega = A \cup B \cup C$, $P(A) = P(B) = P(C) = p$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = q$ y $P(A \cap B \cap C) = z$. Hallar:
   (a) $P(A^c \cap B^c \cap C)$
   (b) $P((A \cap B \cap C)^c)$
   (c) $P(A \cup (B^c \cap C^c))$
   (d) $P((A \cap B)^c \cup C^c)$

3. Se sientan 4 personas, al azar, en 4 sillas que llevan sus nombres (una silla con cada nombre). ¿Que probabilidad hay de que alguna de las personas quede en la silla con su nombre?

4. La siguiente tabla contiene las probabilidades correspondientes a las intersecciones de los eventos indicados:

	B	B^c
A	0.4	0.2
A^c	0.15	0.25

   (a) Hallar $P(A \mid B)$
   (b) Hallar $P(B \mid A)$
   (c) Hallar $P(A^c \mid B)$
   (d) Hallar $P(B^c \mid A)$

5. n personas se sientan al azar en una fila de 2n asientos. Hallar la probabilidad de que no queden 2 personas en sillas contiguas.

6. En el lanzamiento de un par de dados, encuentre la probabilidad de que:

(a) La suma de los dados sea 7
(b) La diferencia entre las caras sea mayor que tres.

7. Se lanza una moneda 8 veces, hallar la probabilidad de que:

   (a) se obtengan exactamente 5 caras,
   (b) se obtengan a lo sumo 4 sellos.

8. Las barajas de poker constan de 52 cartas (no incluimos los comodines), distribuidas como sigue: se tienen 4 pintas: corazón ($\heartsuit$), diamante ($\diamondsuit$), trébol ($\clubsuit$) y pica ($\spadesuit$). De cada pinta hay 13 cartas denominadas 1,2,...,10, J, Q y K. Se reparten al azar 5 cartas (una mano) a cada jugador. Hallar la probabilidad de que en una mano el jugador I reciba:

   (a) ninguna pica,
   (b) al menos 2 picas,
   (c) 3 cartas del mismo número (un *trío*) y otras dos cartas con números distintos al del trío y distintos entre sí. Por ejemplo, $\{3\heartsuit, 3\spadesuit, 3\clubsuit, 5\clubsuit, Q\diamondsuit\}$ es una mano incluída en el evento que nos interesa. ($\star$)[1]

9. La urna I contiene r bolas rojas y b blancas. La urna II contiene, inicialmente, una bola roja y una blanca. Se toma una bola al azar de la urna I y se pasa a la II, luego se extrae una bola al azar de la urna II y resulta ser blanca. Cúal es la probabilidad de que la bola pasada de la urna I a la II haya sido blanca?

10. Las llamadas telefónicas a una empresa son recibidas por tres recepcionistas A, B y C, de tal manera que de las 200 llamadas recibidas en un día, 60 son atendidas por la recepcionista A, 80 por B y las restantes por C. La recepcionista A se equivoca al pasar la llamada en un 2% de las veces, la recepcionista B en un 5% y la C en un 3%. Hallar la probabilidad de que al pasar una llamada recibida en la empresa, ésta sea pasada al lugar equivocado

11. Una urna contiene inicialmente r bolas rojas y b blancas. Se extraen 5 bolas, una por una, al azar, sin remplazo.

    (a) Hallar la probabilidad de que la secuencia sea RBRBR (Primera Roja, Segunda Blanca,...).
    (b) Hallar la probabilidad de que la secuencia sea RRRBB. Compare con (a). Generalize.

[1] El símbolo $\star$ significa que el problema (o la parte indicada del mismo) es relativamente difícil, y puede considerarse opcional.

(c) Ahora se extraen al azar, una por una y sin remplazo, todas las bolas de la urna. Diga porque todas las secuencias de extracción tienen la misma probabilidad.

(d) ¿Cual es la probabilidad de que la última bola extraída sea roja?

12. Un virus peligroso está presente en el 0.01% de la población nacional. Se tiene una prueba clínica para detectar la presencia del virus, y esta prueba es correcta en el 99% de los casos (: entre los portadores del virus, la prueba dá positivo el 99% de las veces y entre los no portadores dá negativo el 99% de las veces). Un individuo tomado al azar en la población, es sometido a la prueba y el resultado de esta es positivo. Al conocer el resultado de la prueba, ¿cual es la probabilidad de que este individuo sea realmente un portador del virus?. Comente sobre el valor de esta probabilidad.

13. Existen 2 caminos para ir de A hasta B, y 2 caminos para ir desde B a C. Cada uno de los caminos tiene probabilidad p de estar bloqueado, independientemente de los otros. Hallar la probabilidad de que haya un camino abierto de A a B, dado que no hay camino de A a C.

14. Se recibe un lote de 1000 artefactos, de los cuales 60 estan dañados. Para decidir si aceptamos o no el lote se seleccionan 200 artefactos al azar, sin remplazo, rechazando el lote si más de 2 estan dañados. Hallar la probabilidad de aceptar el lote.

15. Consideremos una sucesión de experimentos independientes consistentes en el lanzamiento de dos dados. En este juego se gana si la suma de los dados es 7. Hallar:

    (a) la probabilidad de ganar por vez primera, en un intento posterior al 12do.

    (b) La probabilidad de haber ganado 2 veces en 20 intentos.

    (c) en 10 intentos, la probabilidad de haber ganado 3 ó más veces.

16. Una unidad de mantenimiento sabe que cada falla reportada tiene probabilidad 0.15 de ser falsa alarma. Si la unidad acepta 25 solicitudes de mantenimiento por día y solo dispone del tiempo para atender 20 fallas reales, determine: ¿Cual es la probabilidad de que todas las fallas reales sean atendidas?

17. Un estanque contiene 500 peces de los cuales 300 estan marcados. Un pescador logra sacar 50 peces. Hallar la probabilidad de que:

    (a) 20 de los peces esten marcados,

    (b) ninguno de los peces este marcado.

18. Un lector óptico falla en la lectura del código de barras, con una probabilidad de 0.01.

    (a) ¿Cual es la probabilidad de que el lector falle solo una vez en las primeras 10 lecturas?

    (b) ¿Cual es la probabilidad de que el lector no falle en las primeras 20 lecturas dado que en las primeras 10 lecturas, el lector no falló.

19. Un depósito guarda 1000 artículos, 100 de los cuales son defectuosos. Un inspector toma uno de los artículos al azar, y si no es defectuoso lo devuelve al lote. Sea N el número de inspecciones de objetos no defectuosos, que se realizan antes de encontrar el primer objeto defectuoso. Calcular la probabilidad de tener $25 \leq N \leq 60$.

20. En un colegio de Artes están matriculados 300 hombres y 700 mujeres. Se eligen 25 estudiantes al azar, hallar la probabilidad de que 15 ó más de los elegidos sean mujeres si:

    (a) el muestreo se hace con remplazo.

    (b) el muestreo se hace sin remplazo.

Soluciones

Se incluyen soluciones completas para los problemas impares y el resultado para los problemas pares.

1. (a) Como $\Omega = A \cup B$, por la fórmula para la probabilidad de la unión de eventos disjuntos, tenemos $1 = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) - P(A \cap B)$, de donde $P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = 0.8$. Para no violar la condición $P(A) \geq P(B)$, debemos tener $P(A \setminus B) \geq P(B \setminus A)$. Por tanto el mayor valor que podemos asignar a $P(B \setminus A)$ es 0.4, con lo que resulta $P(B) = 0.6$.
(b) Otra vez usamos $\Omega = A \cup B$, para decir que el conjunto universal puede escribirse como la unión de tres partes disjuntas:
$$\Omega = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B). \tag{1}$$
De las tres partes de Ω en (1), la única que no esta en A es $(B \setminus A)$ y, por lo tanto, en nuestro caso $A^c = \Omega \setminus A = B \setminus A$, y $P(A^c) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5$.
(c) Por la fórmula de De Morgan, $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \Omega^c = \emptyset$ y, por tanto $P(A^c \cap B^c) = 0$.

2. La idea en este problema es descomponer Ω en siete partes disjuntas. Se obtiene: (a) $p - 2q + z$, (b) $1 - z$, (c) p, (d) $1 - z$.

3. Llamemos A_i, para $i = 1, \dots, 4$, al evento <u>*La i-ésima persona ocupa su silla*</u>. Entonces el evento $A =$ <u>*Alguna persona ocupa su silla*</u>, satisface $A = \cup_{i=1}^{4} A_i$. Esta unión no es disjunta (las personas 1 y 2 pueden **ambas** quedar en sus sillas). Por lo tanto, para calcular $P(A)$ usamos la fórmula de inclusión-exclusión:
$$P(A) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$$
$$\sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \tag{2}$$
Nota: En (2), la segunda suma es sobre los pares de índices (del 1 al 4) i, j, con $i < j$. Esto quiere decir que restamos $P(A_1 \cap A_2)$ pero no $P(A_2 \cap A_1)$. Es decir, cada par de índices se considera una sola vez, como subconjunto de $\{1, 2, 3, 4\}$, no como par ordenado. Entonces, la suma en el segundo término de (2) es de 6 sumandos. El mismo comentario vale para el tercer término, que resulta ser de 4 sumandos (y de hecho también para el cuarto).

El resultado del experimento *las personas se sientan al azar* puede ser descrito por una lista ordenada, (s_1, s_2, s_3, s_4), donde s_i es la silla ocupada por la i-esima persona. Por el enunciado, los s_i son distintos (no se vale sentarse en las piernas de otra persona) y son los naturales del 1 al 4. Entonces, hay 4! listas posibles y todas con la misma probabilidad, 1/4!. El evento A_i corresponde a las listas en que $s_i = i$, que son 3! (los otros tres elementos pueden ocupar las tres sillas restantes en cualquier orden). Por lo tanto, $P(A_i) = 3!/4! = 1/4$, para cada i. El evento $A_i \cap A_j$ corresponde a las listas en que $s_i = i$ y $s_j = j$, que son solo dos listas, por lo que $P(A_i \cap A_j) = 2/4! = 1/12$. Similarmente, para $i < j < k$, $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 1/4!$ y $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1/4!$. Sustituyendo en (2), nos queda

$$P(A) = 4 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{17}{24}.$$

4. (a) 40/55, (b) 4/6, (c) 15/55, (d) 2/6.

5. A los efectos del problema planteado, la identidad de las personas no interesa, y podemos decir que Ω consta de las $\binom{2n}{n}$ maneras de ocupar n asientos de los $2n$ disponibles. Sea A el evento <u>*No hay dos personas en sillas contiguas*</u>. Una asignación de sillas en A es la siguiente (en donde O significa silla ocupada y V silla vacia):

$$|O|V|O|V|\cdots|O|V|,$$

es decir, ocupamos las sillas impares. A partir de esta configuración, pueden obtenerse las otras en A como sigue: La persona en la i-ésima silla ocupada la movemos un puesto a la derecha y, para que no queden personas en sillas contiguas, todas las personas a su derecha también se corren un puesto a la derecha. Por ejemplo, para $i = 2$, queda la siguiente configuración

$$|O|V|V|O|V|\cdots|O|V|O|,$$

mientras que, para $i = 1$, quedan ocupadas las sillas pares. El total de nuevas configuraciones que podemos producir es n, pues i varía de 1 a n, y

$$P(A) = \frac{n+1}{\binom{2n}{n}},$$

una probabilidad bastante pequeña.

6. (a) 6/36, (b) 6/36.

7. (a) El principio de la multiplicación nos dice que hay, en total, 2^8 sucesiones de 8 C's y S's. Este es el número de resultados en nuestro espacio muestral. Por ser la moneda justa, todas estas sucesiones son igualmente probables. Para

producir una sucesión con exactamente 5 C's, elegimos 5 de los 8 'puestos' de la sucesión, y en ellos colocamos la letra C. Esto podemos hacerlo de $\binom{8}{5}$ maneras. Por lo tanto la probabilidad pedida es

$$P(\text{exactamente 5 caras }) = \binom{8}{5}/2^8 = 7/32.$$

(b) El evento A=<u>*A lo sumo cuatro sellos*</u>, puede escribirse como $A = \cup_{i=0}^4 A_i$, donde A_i es el evento <u>*Exactamente i sellos*</u>. Nótese que esta unión <u>si</u> es disjunta (no podemos tener, al mismo tiempo, exactamente 2 sellos y exactamente 3 sellos). Por lo tanto $P(A) = \sum_{i=0}^4 P(A_i)$, y cada uno de los sumandos se calcula como en la parte (a) (recuerde, en particular, que $\binom{8}{0} = 1$). Así, obtenemos

$$P(A) = 2^{-8} \sum_{i=0^4} \binom{8}{i} = 163/256.$$

8.

$$\text{(a) } \frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}, \quad \text{(b) } 1 - \frac{\binom{39}{5} + \binom{39}{4}\binom{13}{1}}{\binom{52}{5}}$$

$$\text{(c) } \frac{13 \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}.$$

9. Definamos algunos eventos de interés. B_1 representa el evento de extraer bola blanca de la urna I. R_1 corresponde a extraer bola roja de esa urna. Obviamente, B_1 y R_1 forman una partición. Llamemos B_2 al evento de extraer bola blanca de la urna II. Se pide $\Pr(B_1|B_2)$. Del enunciado tenemos:

$$\Pr(B_1) = \frac{b}{r+b}, \ \Pr(R_1) = \frac{r}{r+b}, \ \Pr(B_2|B_1) = \frac{2}{3}, \ \Pr(B_2|R_1) = \frac{1}{3}.$$

El Teorema de Bayes, utilizando como partición B_1 y R_1, nos dá:

$$\Pr(B_1|B_2) = \frac{\Pr(B_1)\Pr(B_2|B_1)}{\Pr(B_1)\Pr(B_2|B_1) + \Pr(R_1)\Pr(B_2|R_1)}.$$

Sustituyendo todos los valores conocidos en esta ecuación, obtenemos

$$\Pr(B_1|B_2) = \frac{2b}{2b+r}.$$

10. 0.035

11. La urna contiene inicialmente $r+b$ bolas. Llamamos R_i al evento *Bola Roja en la i-ésima extracción*, y definimos similarmente B_i. Con esta notación, la secuencia $RBRBR$ corresponde al evento $R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4 \cap R_5$ y por la fórmula de probabilidad condicional iterada, tenemos

$$P(RBRBR) = P(R_1)P(B_2 \mid R_1)\dots P(R_5 \mid R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4)$$
$$= \frac{r}{(r+b)}\frac{b}{(r+b-1)}\frac{r-1}{(r+b-2)}\frac{b-1}{(r+b-3)}\frac{r-2}{(r+b-4)}$$

Por el mismo procedimiento, tenemos $P(RRRBB) =$

$$= \frac{r}{(r+b)}\frac{r-1}{(r+b-1)}\frac{r-2}{(r+b-2)}\frac{b}{(r+b-3)}\frac{b-1}{(r+b-4)},$$

la misma probabilidad que en la parte (a). Observamos que al aplicar la fórmula de probabilidad condicional iterada para calcular la probabilidad de una secuencia de extracción, el denominador siempre será $(r+b)(r+b-1)\dots(r+b-m+1) = \mathcal{V}_m^{r+b}$ (*variaciones* de $r+b$ en m), donde m es el total de bolas extraídas, mientras que en el numerador, luego de reordenar, aparecen dos factores: $\mathcal{V}_s^r$, siendo s el número de bolas rojas en la secuencia considerada y $\mathcal{V}_t^b$, donde t es la cantidad de bolas blancas en la secuencia. Por lo tanto, la probabilidad de una secuencia dada solo depende de la cantidad de bolas rojas y blancas en la secuencia y no del orden de extracción. Ahora bien, en cualquier secuencia S de extracción de *todas* las bolas de la urna, aparecen r bolas rojas y b blancas, por lo que

$$P(S) = \frac{r!.b!}{(r+b)!}$$

Finalmente, el evento de que la última bola extraída sea roja, R_{r+b}, corresponde al evento *En una muestra sin remplazo, de r+b-1 bolas, se obtienen b blancas* (es decir, en $r+b-1$ extracciones han salido todas las bolas blancas y por lo tanto la última tiene que ser roja), cuya probabilidad calculamos mediante la fórmula para la distribución hipergeométrica:

$$\frac{\binom{r}{r-1}\binom{b}{b}}{\binom{r+b}{r+b-1}} = \frac{r}{r+b}.$$

12. $0.0098 \simeq 1\%$. Esta probabilidad puede sorprender un poco por lo baja. Lo que está ocurriendo es que la probabilidad de ser portador del virus es mucho menor que la probabilidad de error en la prueba y, por tanto, la inmensa mayoría de los positivos en la prueba van a ser falsos. Concluíimos que, para este virus, una probabilidad de acierto del 99% en la prueba no es aceptable (es muy baja) y es necesario mejorar la prueba.

13. Escribimos $A \not\to B$ para denotar que no hay caminos abiertos de A a B y $A \to B$ cuando si los hay. La probabilidad pedida es $P(A \to B \mid A \not\to C)$. Para que ocurra $A \not\to B$ ambos caminos entre A y B deben estar bloqueados, por lo que:

$$P(A \to B) = P(B \to C) = 1 - p^2. \tag{3}$$

Del enunciado entendemos que para ir de A a C, es necesario pasar por B, por lo cual $A \not\to C = (A \to B \cap B \to C)^c$, y por la hipótesis de independencia, $P(A \not\to C) = 1 - P(A \to B)P(B \to C) = 1 - (1-p^2)^2 = 2\,p^2 - p^4$. Finalmente, notemos que el evento $A \to B \cap A \not\to C$ es el mismo que $A \to B \cap B \not\to C$, y al usar la fórmula de Bayes, resulta

$$P(A \to B \mid A \not\to C) = \frac{P(A \to B \cap B \not\to C)}{P(A \not\to C)} = \frac{(1-p^2)p^2}{2\,p^2 - p^4} = \frac{1-p^2}{2-p^2}.$$

14.

$$\frac{\binom{940}{200}}{\binom{1000}{200}} + \frac{60 \times \binom{940}{199}}{\binom{1000}{200}} + \frac{\binom{60}{2}\binom{940}{198}}{\binom{1000}{200}} \approx 1.4 \times 10^{-4}$$

Esta probabilidad resulta tan baja porque en una muestra de 200 artefactos, esperamos encontrar, en promedio, unos 12 dañados, por lo que aparezcan solo dos o menos dañados debe ser bastante improbable.

15. En cualquier lanzamiento de los dados tenemos

$$p = P(\text{suma de los dados es 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

A lo largo de los lanzamientos sucesivos (e independientes), esta probabilidad se mantiene constante, por lo cual tenemos una sucesión de ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p, y podemos usar la fórmula correspondiente a la distribución Binomial. Tenemos, así

$$P(\text{primer éxito mas allá del 12do intento}) =$$

$$= P(\text{perder en los primeros 12 intentos}) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{12} \simeq 0.112,$$

$$P(\text{ganar 2 veces en 20 intentos}) = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \simeq 0.198$$

$$\text{y } P(\text{ganar 3 ó más veces en 10 intentos}) =$$

$$= 1 - P(\text{ganar 2 ó menos veces en 10 intentos})$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^9 - \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 \simeq 0.225.$$

16. $1-\sum_{i=0}^{4}\binom{25}{i}(0.15)^i(0.85)^{25-i}$.

17. Podemos ver la captura de los 50 peces como un procedimiento de muestreo sin remplazo (el pescador no los regresa al estanque), de una población de 500 individuos (los peces), de los cuales 300 tienen una característica de interés (estar marcados). Usamos, entonces, la fórmula de probabilidad para la distribución hipergeométrica:

$$P(20 \text{ peces capturados están marcados}) = \frac{\binom{300}{20}\binom{200}{30}}{\binom{500}{50}}$$

$$\text{y } P(\text{ningún pez capturado está marcado}) = \frac{\binom{200}{50}}{\binom{500}{50}}$$

18. (a) 0.0914 (b) 0.904

19. Al tomar un artículo del lote al azar, la probabilidad de que sea defectuoso es $p = P(\text{defectuoso}) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$. Como el artículo no defectuoso es devuelto al lote para proseguir el experimento, la probabilidad p se mantiene constante entre los intentos sucesivos. $N+1$ es el número de inspecciones hasta encontrar el primer defectuoso, que podemos ver como el número de intentos hasta el primer *éxito* en ensayos Bernoulli independientes con la misma probabilidad p de éxito y, por tanto, la distribución de $N+1$ es $\text{Geo}(p)$, es decir $P(N=n) = p(1-p)^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces, usando la fórmula para la suma de una serie geométrica que aprendimos en la infancia, resulta

$$P(25 \le N \le 60) = \sum_{i=25}^{60} p(1-p)^i = \frac{p\left((1-p)^{25} - (1-p)^{61}\right)}{1-(1-p)} \simeq 0.0702$$

20. (a) $\sum_{j=15}^{25}\binom{25}{j}(0.7)^j(0.3)^{25-j}$, (b) $\sum_{j=15}^{25}\frac{\binom{700}{j}\binom{300}{25-j}}{\binom{1000}{25}}$.